BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a V – a

1. a) **(3p)** Calculaţi: $5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3$.
b) **(4p)** Arătaţi că numărul 2015^{2014} poate fi scris ca o sumă de patru cuburi perfecte.

(Gazeta Matematică)

Soluţie:

a) $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $11^3 = 1331$
suma este: $125 + 216 + 343 + 1331 = 2015$

b) $2015^{2014} = 2015^{2013} \cdot 2015 = 2015^{2013} \cdot (5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3) = 2015^{2013} \cdot 5^3 + 2015^{2013} \cdot 6^3 +$
$+ 2015^{2013} \cdot 7^3 + 2015^{2013} \cdot 11^3 = (2015^{671} \cdot 5)^3 + (2015^{671} \cdot 6)^3 + (2015^{671} \cdot 7)^3 + (2015^{671} \cdot 11)^3$.

Barem:

a)	$5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $11^3 = 1331$	2p
	suma este: $125 + 216 + 343 + 1331 = 2015$	1p
b)	$2015^{2014} = 2015^{2013} \cdot 2015 = 2015^{2103} \cdot (5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3)$	1p
	$2015^{2103} \cdot (5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3) = 2015^{2013} \cdot 5^3 + 2015^{2013} \cdot 6^3 + + 2015^{2013} \cdot 7^3 + 2015^{2013} \cdot 11^3$	1p
	$2015^{2013} \cdot 5^3 + 2015^{2013} \cdot 6^3 + + 2015^{2013} \cdot 7^3 + 2015^{2013} \cdot 11^3 = (2015^{671} \cdot 5)^3 + (2015^{671} \cdot 6)^3 + (2015^{671} \cdot 7)^3 + (2015^{671} \cdot 11)^3$	2p

2. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 2^2, 2^3, ... , 2^{99}\}$, suma $S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{99}$ şi mulţimea B formată din numere care se pot scrie ca sumă de elemente diferite din mulţimea A.

a) **(1p)** Determinaţi numărul de elemente din mulţimea A.
b) **(2p)** Arătaţi ca $2015 \in B$.
c) **(3p)** Arătaţi că $2S = 2 + 2^2 + ... + 2^{99} + 2^{100}$ şi calculaţi S.
d) **(1p)** Justificaţi că $2^{100} \notin B$.

Prof. Nicuţă Petru

Soluţie:

a) $1 = 2^0$; $2 = 2^1$; se deduce că mulţimea A are 100 de elemente.
b) $2015 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$ şi fiecare termen al sumei este element al mulţimii A, deci $2015 \in B$.
c) $S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{99} \,/ \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot S = 2 + 2^2 + ... + 2^{99} + 2^{100}$
$2S - S = (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{99} + 2^{100}) - (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{99}) \Rightarrow S = 2^{100} - 1$.
d) Cel mai mare element din B este suma tuturor elementelor din A, adică $2^{100} - 1$.
$2^{100} > 2^{100} - 1 \Rightarrow 2^{100} \notin B$.

Barem:

a) $1 = 2^0$; $2 = 2^1 \Rightarrow$ card A = 100	1p
b) $2015 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$	2p
c) $S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{99} \,/ \cdot 2 \Rightarrow 2S = 2 + 2^2 + ... + 2^{99} + 2^{100}$	1p
$2S - S = (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{99} + 2^{100}) - (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{99}) \Rightarrow S = 2^{100} - 1$	2p
d) Cel mai mare element din B este suma tuturor elementelor din A, adică $2^{100} - 1$, deci $2^{100} \notin B$.	1p

3. Fie numerele naturale a_1, a_2, a_3, ...,a_{2015}, care împărţite la un număr natural nenul *n*, dau resturi diferite două câte două şi câturi nenule, diferite două câte două.

a) **(3p)** Arătaţi că *n* este mai mare ca 2014.

b) **(4p)** Dacă S este cea mai mică valoare a sumei $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2015}$, arătaţi că $2\cdot(S - 2015^2)$ se poate scrie ca un produs de trei numere naturale consecutive.

Prof. Sascău Gabriela

<u>Soluţie:</u>

a) Din enunț se deduce că cele 2015 numere sunt distincte două câte două, altfel ar fi cel puțin 2 câturi egale și două resturi egale. La cele 2015 împărțiri, se obțin 2015 resturi distincte, conform enunțului, fiecare mai mic decât *n* (din teorema împărțirii cu rest). Dacă *n* este mai mic decât 2015, fiind vorba de 2015 împărțiri, cel puțin 2 împărțiri ar avea același rest. Deci *n* este mai mare sau egal cu 2015.

b) Câturile nenule, minime și distincte care se pot obține sunt 1, 2,..., 2015, iar resturile minime sunt 0, 1, 2,...,2014. Suma minimă este $S = 2015(1 + 2 +...+ 2015) + (0 + 1 +...+ 2014) = 2015^2 \cdot 1008 + 1007 \cdot 2015$

$2\cdot(S - 2015^2) = 2\cdot(2015^2 \cdot 1008 + 1007 \cdot 2015 - 2015^2) = 2\cdot(2015^2 \cdot 1007 + 1007 \cdot 2015) = 2 \cdot 2015 \cdot 1007 \cdot 2016$ $= 2014 \cdot 2015 \cdot 2016$.

<u>Barem:</u>

a) - cele 2015 numere sunt distincte două câte două	1p
- la cele 2015 împărțiri, se obțin 2015 resturi distincte,fiecare mai mic decât *n*	1p
- dacă *n* este mai mic decât 2015, cel puțin 2 împărțiri ar avea același rest, deci *n* este mai mare sau egal cu 2015	1p
b) - câturile nenule, minime și distincte care se pot obține sunt 1, 2, ... , 2015	1p
- resturile minime sunt 0, 1, 2, ... ,2014	1p
$S_{minimă} = 2015(1 + 2 +...+ 2015) + (0 + 1 +...+ 2014) = 2015^2 \cdot 1008 + 1007 \cdot 2015$	1p
$2\cdot(S - 2015^2) = 2\cdot(2015^2 \cdot 1008 + 1007 \cdot 2015 - 2015^2) = 2\cdot(2015^2 \cdot 1007 + 1007 \cdot 2015)$ $= 2 \cdot 2015 \cdot 1007 \cdot 2016 = = 2014 \cdot 2015 \cdot 2016$.	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.